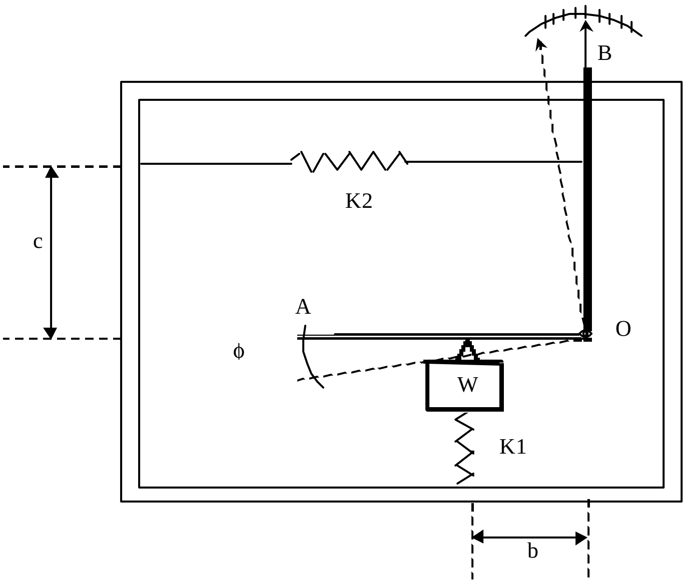
ACCEDE - INGENIERÍA AERONÁUTICA

PROBLEMA Nº 5

SITUACIÓN

El instrumento de la figura se utiliza para medir la amplitud de sistemas que vibran. La forma de utilizarlo es apoyándolo sobre el sistema vibrante y leyendo la amplitud de la vibración en el dial de la parte superior



Se conocen los siguientes datos:

La constante elástica del resorte K1

La constante elástica K2 del elemento elástico donde se apoya la masa M

La masa vibrante M (puntual)de peso W

Los momentos de inercia respecto de su centro (la mitad) Ia e Ib de las barras AO y OB respectivamente.

Las longitudes L1 y L2 de las barras AO y OB respectivamente.

Las longitudes c y b

Las masas m_a y m_b de las barras AO y OB respectivamente

INFORMACIÓN A TENER EN CUENTA

Pulsación angular = $p = \sqrt{\dfrac{k_{equivalene}}{m_{equivalene}}}$

Primera ley de la dinámica de Newton : $\sum F_{ext} = m.a_g$

Teorema de Steiner: $I_o = I_{cuerpo} + m_{cuerpo} d_{co}^{\;2}$ d_{co} = distancia cuerpo -origen

Segunda ley de la dinámica de Newton: $\dfrac{dK_o}{dt} = \sum M_{ext}$

Momento angular = $K_o = (G - O) \wedge m.v_o + I_{ij}.\omega_j.\vec{e}_i$

Ecuación de Lagrange: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_j} + \dfrac{\partial U}{\partial q_j} + \dfrac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_j} = Q_j$

T = Energía cinética

U = Energía potencial

Ed = Energía disipativa

Qj = Fuerza ext. generalizada

Qj = Grado de libertad

SUBPROBLEMA 5.1
Hallar la pulsación angular (p) del peso W aplicando la primera ley de la dinámica de Newton sin considerar la contribución inercial de las barras AO y OB.

RESPUESTA AL SUBPROBLEMA 5.1
Si no se considera la contribución inercial de las barras AO y OB, se puede hallar un modelo simplificado del sistema haciendo:

$$\sum M_o = 0$$

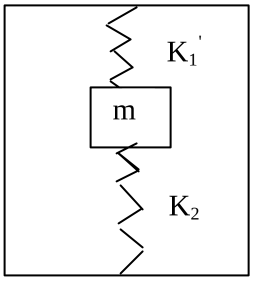
$k_2\ \delta_1\ c = k_1^{'}\ \delta_2\ b$

Siendo:

δ_1 y δ_2 los desplazamientos de los resortes de constantes k_1 y k_2 respectivamente cuando el sistema de barras gira respecto de o.

$k_1^{'}$ la constante equivalente sobre la masa m proveniente del resorte k_2.

Además: $\dfrac{\delta_1}{b} = \dfrac{\delta_2}{c}$



Con lo cual:

$$k_1^{'} = k_2 \frac{c^2}{b^2}$$

Finalmente la constante elástica equivalente de este modelo es:

$k_e = k_1 + k_1^{'}$

Aplicando la primera ley de la dinámica de Newton a la masa m se tiene la ecuación del movimiento de la masa m en coordenada δ_1:

$$\sum F_{ext} = m.a_g$$

$$m\ddot{\delta}_1 + k_e \delta_1 = 0$$

$$\ddot{\delta}_1 + \frac{k_e}{m}\ \delta_1 = 0$$

Finalmente la pulsación angular (p) del peso W de masa m queda:

$$\boxed{p = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2 \dfrac{c^2}{b^2}}{m}}}$$

SUBPROBLEMA 5.2
Hallar la pulsación angular (p) del peso W aplicando la ley de la dinámica de Newton teniendo en cuenta la contribución inercial de las barras AO y OB.

RESPUESTA AL SUBPROBLEMA 5.2
Planteando la segunda ley de la dinámica de Newton:

$$\frac{dK_o}{dt} = \sum Mo$$

y con $K_o = I_{ij}.\omega_j.\vec{e}_i$ pues $v_o = 0$

(Solo hay componente de la velocidad angular en dirección perpendicular al plano de las barras AOB)

Se tiene la ecuación del movimiento en coordenada ϕ:

$$mb^2\ddot{\phi} + I\ddot{\phi} = -(k_2\delta_2 c + k_1\delta_1 b)$$

$$(mb^2 + I)\ddot{\phi} = -(k_2c^2 + k_1b^2)\phi$$

Con $I = I_a + m_a\left(\frac{L_1}{2}\right)^2 + I_b + m_b\left(\frac{L_2}{2}\right)^2$

Finalmente la ecuación del movimiento queda:

$$\ddot{\phi} + \frac{(k_2c^2 + k_1b^2)}{mb^2 + I}\phi = 0$$

Con lo que se obtiene la pulsación angular (p) del peso W (que es independiente de la coordenada elegida para describir el movimiento de la masa m):

$$\boxed{p = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2\frac{c^2}{b^2}}{m + \frac{I}{b^2}}}}$$

SUBPROBLEMA 5.3

Hallar la pulsación angular (p) del peso W aplicando las ecuaciones de la dinámica de Lagrange teniendo en cuenta la contribución inercial de las barras AO y OB.

RESPUESTA AL SUBPROBLEMA 5.3

Para hallar la pulsación angular (p) del peso W aplicando las ecuaciones de la dinámica de Lagrange teniendo en cuenta la contribución inercial de las barras AO y OB se debe calcular la energía cinética y potencial puesta en juego en el sistema:

Energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\delta}_1^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$$

$$\delta_1 = b\phi$$

$$T = \frac{1}{2}mb^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$$

Donde $I = I_a + m_a\left(\frac{L_1}{2}\right)^2 + I_b + m_b\left(\frac{L_2}{2}\right)^2$

La energía potencial es:

$$U = \frac{1}{2}k_1(b\phi)^2 + \frac{1}{2}k_2(c\phi)^2$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_j} = Q_j$$

Con:

$$-\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$Q_j = 0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) = mb^2\dot{\phi} + I\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) = mb^2\ddot{\phi} + I\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = k_1 b^2\phi + k_2 c^2\phi$$

Queda la ecuación del movimiento de la masa m en coordenada ϕ:

$$(mb^2 + I)\ddot{\phi} + (k_2c^2 + k_1b^2)\phi = 0$$

Finalmente obteniendo la pulsación angular (p) de la masa m (idem subproblema 2):

$$\boxed{p = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2\dfrac{c^2}{b^2}}{m + \dfrac{I}{b^2}}}}$$